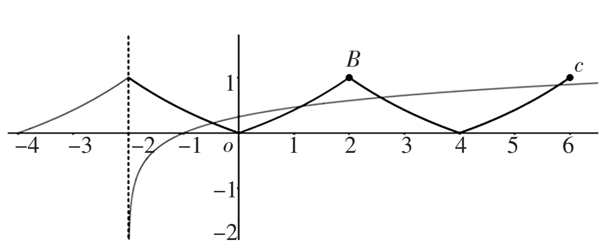
问题处理.在解题的过程中分离参数的方法，转化为求函数在闭区间的最值问题处理，求最值时可用导数或基本不等式处理，具体求解中要注意合理的变形.

【例 4】设函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数，且 $f(x+2)=f(2-x)$，当 $x\in[-2,0]$ 时，$f(x)=(\frac{\sqrt{2}}{2})^{x}-1$，若在区间 $(-2,6)$ 内关于 x 的方程 $f(x)-\log_a(x+2)=0(a>0$ 且 $a\neq1)$ 有且只有 4 个不同的根，则实数 a 的取值范围是(　　)

A. $(\frac{1}{4}, 1)$　B. $(1, 4)$　C. $(1, 8)$　D. $(8, +\infty)$

【解析】由题意可得函数 $f(x)$ 的对称轴为 $x=2$，周期为 $T=4$，原方程变形为 $f(x)=\log_a(x+2)$，$x\in(-2,6)$，所以只需画出 $y=f(x)$，$y=\log_a(x+2)$ 两个函数在区间 $(-2,6)$ 的图像，根据图像求 a 的范围，图像如下，$y=\log_a(x+2)$ 一定过 $(-1,0)$ 点，当 $0<a<1$ 时，显然只有一个交点，所以 $a>1$，只需要对数从点 B，点 C 下面穿过就有 4 个零点，所以 $\log_a4<1$，$\log_a8<1$，解得 $a>8$，选 D.



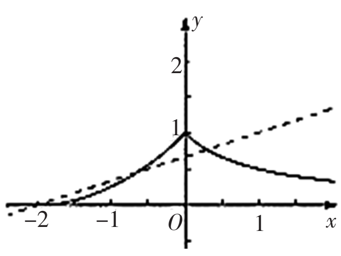
【点评】对于求不同类的两个函数构成的方程，我们常把方程变形为 $f(x)g(x)$，然后根据 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 的两个图像交点个数来判断原方程根的个数.如本题把方程 $f(x)-\log_a(x+2)=0$ 变形为 $y=f(x)$，$y=\log_a(x+2)$，再画出两个函数的图像，根据两个图像有 4 个交点，求出参数 a 的范围.

【例 5】 已知函数 $f(x)=\begin{cases}(\frac{1}{2}x+1)^3, & -2\leqslant x\leqslant0\\ \frac{1}{x+1}, & x>0\end{cases}$ 若关于 x 的方程 $f(x)-k(x+2)=0$ 有 3 个实数根，则实数 k 的取值范围是(　　)

A. $(0, \frac{1}{4})$　　B. $(0, \frac{1}{3})$

C. $(0, 1)$　　D. $(0, \frac{1}{2})$

【解析】作图如下：



因此，要使方程 $f(x)-k(x+2)=0$ 有 3 个，实数 k 的取值范围是 $(0, \frac{1-0}{0-(-2)})=(0, \frac{1}{2})$，选 D.

【点评】对于方程解的个数（或函数零点个数）问题，可利用函数的值域或最值，结合函数的单调性、草图确定其中参数范围.从图像的最高点、最低点，分析函数的最值、极值；从图像的对称性，分析函数的奇偶性；从图像的走向趋势，分析函数的单调性、周期性等.

【例 6】函数 $f(x)=ax^2-2x+1$ 在区间 $(-1, 1)$ 和区间 $(1, 2)$ 上分别存在一个零点，则实数 a 的取值范围是(　　)

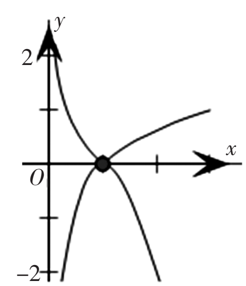
A. $-3<a<1$　B. $\frac{3}{4}<a<1$　C. $-3<a<\frac{3}{4}$　D. $a<-3$ 或 $a>\frac{3}{4}$

【解析】根据函数零点存在性定理，结合二次函数图像可知，函数 $f(x)=ax^2-2x+1$ 在区间 $(-1, 1)$ 和区间 $(1, 2)$ 上分别存在一个零点时，$\begin{cases}f(-1)f(1)<0,\\ f(1)f(2)<0,\end{cases}$ 解得 $\frac{3}{4}<a<1$，故选 B.

【例 7】已知 $f(x)$ 是定义域为 $(0, +\infty)$ 的单调函数，若对任意的 $x\in(0, +\infty)$，都有 $f[f(x)+\log_{\frac{1}{2}}x]=4$，且方程 $|f(x)-3|=x^3-6x^2+9x-4+a$ 在区间 $(0, 3]$ 上有两解，则实数 a 的取值范围是(　　)

A. $0<a\leqslant5$　B. $a<5$　C. $0<a<5$　D. $a\geqslant5$

【解析】由题意知必存在唯一的正实数 a，满足 $f(x)+\log_{\frac{1}{3}}x=a$，$f(a)=4$ ……①，∴ $f(a)+\log_{\frac{1}{3}}x=a$ ……②，由①②得：$\log_{\frac{1}{3}}x=a-4$，∴ $a=(\frac{1}{3})^{a-4}$，解得 $a=3$. 故 $f(x)=3-\log_{\frac{1}{3}}x$，由方程 $|f(x)-3|=x^3-6x^2+9x-4+a$ 在区间 $(0,3]$ 上有两解，即有 $|\log_{\frac{1}{3}}x|=x^3-6x^2+9x-4+a$ 在区间 $(0,3]$ 上有两解，由 $g(x)=x^3-6x^2+9x-4+a$，可得 $g'(x)=3x^3-12x+9$，当 $1<x<3$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 递减；当 $0<x<1$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 递增. $g(x)$ 在 $x=1$ 处取得最大值 a，$g(0)=a-4$，$g(3)=a-4$，分别作出 $y=|\log_{\frac{1}{3}}x|$，和 $y=x^3-6x^2+9x-4$ 的图像，可得两图像只有一个交点 $(1, 0)$，将 $y=x^3-6x^2+9x-4$ 的图像向上平移，至经过点 $(3, 1)$，有两个交点，由 $g(3)=1$，即 $a-4=1$，解得 $a=5$，当 $0<a\leqslant5$ 时，两图像有两个交点，即方程两解. 故选 A.



【例 8】已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x)+f(2-x)=2$，当 $x\in(0,1]$ 时，$f(x)=x^2$，当 $x\in(0,1]$ 时，$f(x)+2=\frac{2}{f(\sqrt{x+1})}$，若定义在 $(-1,3)$ 上的函数 $g(x)=f(x)-t(x+1)$ 有三个不同的零点，则实数 t 的取值范围是__________.

【解析】当 $x\in(0,1]\Rightarrow0<\sqrt{x+1}\leqslant1$ 时，则 $f(\sqrt{x+1})=x+1$，故 $f(x)\frac{2}{x+1}-2$；当 $x\in(1,2]\Rightarrow0\leqslant2-x<1$ 时，则 $f(2-x)=(2-x)^2$，故 $f(x)=2-(2-x)^2$；当 $x\in(2, 3)\Rightarrow-1\leqslant2-x<0$ 时，则